

BAB II

KAJIAN TEORI

A. Variabel *Random* dan Distribusinya

Definisi 2.1 : (Walpole, 1992)

Himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan disebut ruang sampel dan diberi simbol S.

Definisi 2.2 : (Walpole, 1992)

Peluang suatu kejadian adalah jumlah bobot semua titik sampel dalam A. Dengan demikian

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1.$$

Sebagai contoh sebuah dadu dibuat tidak setimbang sehingga bilangan genap dua kali lebih besar peluangnya untuk muncul daripada bilangan ganjil. Bila E adalah kejadian munculnya bilangan yang lebih kecil dari 4 pada satu kali lemparan, akan dihitung $P(E)$. Ruang sampelnya adalah $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pada setiap bilangan ganjil diberi peluang w dan pada bilangan genap $2w$. Karena jumlah semua peluang sama dengan 1 maka $9w = 1$ dan $w = \frac{1}{9}$. Jadi,

$$P(E) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

Definisi. 2.3 : (Walpole, 1992)

Suatu fungsi yang nilainya berupa bilangan nyata yang ditentukan oleh setiap unsur dalam ruang sampel disebut variabel random.

Definisi. 2.4 : (Walpole, 1992)

Bila suatu ruang sampel mengandung jumlah titik sampel yang terhingga atau suatu barisan unsur yang tidak pernah berakhir tetapi yang sama banyaknya dengan bilangan cacah, maka ruang itu disebut ruang sampel diskrit.

Variabel *random* yang didefinisikan pada ruang sampel yang diskrit disebut variabel *random* diskrit.

Definisi. 2.5 : (Walpole, 1992)

Sebuah tabel atau rumus yang mencantumkan semua kemungkinan nilai suatu variabel random diskrit berikut peluangnya disebut distribusi peluang diskrit.

Definisi. 2.6 : (Walpole, 1992)

Kejadian A dan B dalam ruang sampel Ω dengan $P(B) > 0$. Peluang terjadinya A bila kejadian B sudah diketahui terjadi adalah

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

disebut peluang A dengan syarat B.

Lebih lanjut, jika X dan Y adalah variabel *random*, maka peluang bersyarat kejadian X bila diketahui kejadian $Y = y$ yang didefinisikan pada seluruh y sedemikian sehingga $P\{Y = y\} > 0$ adalah

$$P\{X = x|Y = y\} = \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}}$$

Dalam sebuah variabel random selalu berhubungan dengan peluang yang akan menghasilkan sebuah distribusi peluang. Salah satu macam distribusi peluang yang termasuk dalam distribusi peluang diskret adalah distribusi poisson.

Distribusi Poisson

Percobaan yang menghasilkan nilai-nilai bagi suatu variabel *random* X , yaitu banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama suatu selang waktu tertentu atau di suatu daerah tertentu sering disebut percobaan Poisson. Percobaan Poisson memiliki ciri-ciri sebagai berikut :

- a. *Banyaknya hasil percobaan yang terjadi dalam suatu selang waktu atau suatu daerah tertentu tidak bergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada selang waktu atau daerah lain yang terpisah.*
- b. *Peluang terjadinya satu hasil percobaan selama suatu selang waktu yang singkat sekali atau dalam suatu daerah yang kecil, sebanding dengan panjang selang waktu tersebut atau besarnya daerah tersebut dan tidak bergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi di luar selang waktu atau daerah tersebut.*
- c. *Peluang bahwa lebih dari satu hasil percobaan akan terjadi dalam selang waktu yang singkat tersebut atau dalam daerah yang kecil tersebut dapat diabaikan. Distribusi peluang bagi peubah acak ini disebut distribusi Poisson.*

Distribusi Poisson hanya bergantung pada rata-rata banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama selang waktu atau daerah yang diberikan. Jika x adalah banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama suatu selang waktu atau daerah tertentu, μ adalah rata-rata banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama selang waktu atau dalam daerah yang diberikan dan $e = 2.71828\dots$, maka distribusi Poisson memiliki fungsi peluang sebagai berikut (Walpole, 1992) :

$$f(x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

B. Proses Stokastik

Definisi 2.7: (Ross, 1996)

Proses stokastik adalah himpunan variabel random $X = \{X(t), t \in T\}$, dengan t adalah bagian dari himpunan indeks T dan $X(t)$ adalah variabel random.

Himpunan indeks T merepresentasikan waktu, yang dapat mengambil nilai dari bilangan bulat atau interval bilangan riil. Proses stokastik diklasifikasikan menjadi empat yaitu proses stokastik waktu diskrit variabel *random* diskrit, proses stokastik waktu diskrit variabel *random* kontinu, proses stokastik waktu kontinu variabel *random* diskrit dan proses stokastik waktu kontinu variabel *random* kontinu.

Definisi 2.8 (Taha, 2001)

Sebuah proses stokastik merupakan proses Markov jika satu kejadian berikutnya hanya bergantung pada tepat satu kejadian yang sedang berlangsung. Variabel random $\{X_{t_n}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ merupakan proses Markov jika memenuhi kondisi sebagai berikut.

$$P\{X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0\} = P\{X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\},$$

dengan t_0, t_1, \dots, t_n adalah waktu kejadian.

Proses Markov sendiri merupakan proses stokastik yang memiliki sifat *memoryless*, yakni nilai peubah diwaktu yang akan datang tidak dipengaruhi nilai peubah diwaktu yang lampau, namun dipengaruhi oleh nilai peubah saat ini.

Definisi 2.9 : (Osaki, 1992)

Misal $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ adalah proses stokastik dengan ruang parameter diskrit dan ruang kedudukan $i = 1, 2, \dots$

Proses $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ merupakan proses Markov jika memenuhi kondisi

$$P\{X(n+1) = j \mid X(0) = i_1, \dots, X(n-1) = i_{n-1}, X(n) = i\} = P\{X(n+1) = j \mid X(n) = i\} = P_{ij} \\ \forall i_0, i_1, \dots, i_n : i, j \text{ dan } n.$$

Artinya distribusi bersyarat $X(n+1)$ hanya bergantung pada $X(n) = i$ maka proses tersebut dinamakan rantai Markov dengan parameter diskrit dan P_{ij} dinamakan peluang transisi.

Definisi 2.10 : (Osaki, 1992)

Misal $\{X(t); t \geq 0\}$ proses stokastik dengan ruang parameter kontinu dengan ruang kedudukan $i = 1, 2, \dots$. Jika memenuhi

$$P\{X(t) = x \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_n) = x_n\} = P\{X(t) = x \mid X(t_n) = x_n\}, \\ \forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$$

maka proses tersebut disebut rantai Markov dengan ruang parameter kontinu.

Untuk $t \geq 0, s \geq 0$,

$$P_{ij}(t) = P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\}$$

adalah peluang transisi dimana kita asumsikan bahwa $P_{ij}(t)$ bebas terhadap waktu t , dan prosesnya stasioner.

Definisi 2.11:

Peluang transisi dinotasikan sebagai P_{ij} merupakan peluang pada sistem yang bergerak dari state i ke j dalam satu langkah (pada satu percobaan atau dalam satu interval waktu) sebagai berikut

$$P\{X(n+1) = j \mid \{X(n) = i\} = P_{ij} \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) adalah peluang transisi yang hanya bergantung pada waktu n secara umum sehingga dapat diasumsikan bahwa peluang transisi adalah stasioner. Proses demikian dinamakan rantai Markov dengan peluang transisi stasioner. (Osaki, 1992). Karena P_{ij} merupakan peluang untuk setiap i dan j , maka $P_{ij} \geq 0$ dan untuk setiap i berlaku

$$\sum_{j=0}^N P_{ij} = 1$$

Himpunan dari seluruh peluang transisi dapat disusun ke dalam suatu matriks transisi yang dimasukan ke dalam baris ke- i dan kolom ke- j . Apabila diketahui ruang S adalah berhingga dengan $S = \{0,1,2,\dots,N\}$ maka dapat dibangun matriks yang elemen-elemennya adalah P_{ij} dengan $i, j \in S$ sebagai berikut.

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots & P_{0N} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1N} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N0} & P_{N1} & P_{N2} & \dots & P_{NN} \end{bmatrix}$$

Matriks $P = [P_{ij}]$ tersebut disebut matriks Markov atau matriks peluang transisi dari proses Markov. $P_{i,j}$ adalah peluang transisi keadaan j setelah keadaan i terjadi.

C. Teori Antrian

1. Definisi Proses Antrian

Menurut Bronson (1996: 310), proses antrian merupakan proses yang berhubungan dengan kedatangan *customer* pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu panggilan dalam baris antrian jika belum mendapat pelayanan dan akhirnya meninggalkan fasilitas pelayanan setelah mendapat pelayanan. Proses ini dimulai saat *customer – customer* yang memerlukan pelayanan mulai datang. Mereka berasal dari suatu populasi yang disebut sebagai sumber input.

Menurut Hillier dan Lieberman (1980: 401), proses antrian adalah suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan *customer* ke suatu sistem antrian, kemudian menunggu dalam antrian hingga pelayan memilih *customer* sesuai dengan disiplin pelayanan, dan akhirnya *customer* meninggalkan sistem antrian setelah selesai pelayanan.

Sistem antrian adalah himpunan *customer*, pelayan, dan suatu aturan yang mengatur kedatangan para *customer* dan pelayanannya. Sistem antrian merupakan “*birth-death process*” dengan suatu populasi yang terdiri atas para *customer* yang sedang menunggu pelayanan atau yang sedang dilayani. *Birth* terjadi jika seorang *customer* memasuki fasilitas pelayanan, sedangkan *death* terjadi jika *customer* meninggalkan fasilitas pelayanan. Keadaan sistem adalah jumlah *customer* dalam suatu fasilitas pelayanan. (Wospakrik, 1996 :302)

2. Komponen Dasar dalam Proses Antrian

Menurut Taha (2007), suatu sistem antrian bergantung pada tujuh komponen yaitu pola kedatangan, pola kepergian, kapasitas sistem, desain pelayanan, disiplin

pelayanan, ukuran sumber pemanggilan, dan perilaku manusia. Komponen – komponen tersebut diuraikan sebagai berikut.

a. Pola Kedatangan

Menurut Wagner (1972:840), pola kedatangan adalah pola pembentukan antrian akibat kedatangan *customer* dalam selang waktu tertentu. Pola kedatangan dapat diketahui secara pasti atau berupa suatu variabel acak yang distribusi peluangnya dianggap telah diketahui.

Jika tidak disebutkan secara khusus *customer* datang secara individu ke dalam sistem antrian. Namun dapat pula lebih dari satu *customer* datang secara bersamaan ke dalam sistem antrian, pada kondisi ini disebut dengan *bulk arrival* (Taha, 2007).

b. Pola Kepergian

Pola kepergian adalah banyak kepergian *customer* selama periode waktu tertentu. Pola kepergian biasanya dicirikan oleh waktu pelayanan, yaitu waktu yang dibutuhkan oleh seorang pelayan untuk melayani seorang *customer*. Waktu pelayanan dapat bersifat deterministik dan dapat berupa suatu variabel acak dengan distribusi peluang tertentu (Bronson, 1996 : 310).

Waktu pelayanan bersifat deterministik berarti bahwa waktu yang dibutuhkan untuk melayani setiap *customer* selalu tetap, sedangkan waktu pelayanan yang berupa variabel *random* adalah waktu yang dibutuhkan untuk melayani setiap *customer* berbeda – beda.

c. Kapasitas Sistem

Menurut Bronson (1996:310), kapasitas sistem adalah banyak maksimum *customer*, baik *customer* yang sedang berada dalam pelayanan maupun dalam antrian, yang ditampung oleh fasilitas pelayanan pada waktu yang sama. Suatu sistem antrian yang tidak membatasi banyak *customer* dalam fasilitas pelayanannya disebut sistem berkapasitas tak berhingga, sedangkan suatu sistem yang membatasi banyak *customer* dalam fasilitas pelayanannya disebut sistem berkapasitas berhingga, jika *customer* memasuki sistem pada saat fasilitas pelayanan penuh maka *customer* akan ditolak dan meninggalkan sistem tanpa memperoleh pelayanan.

d. Desain Pelayanan

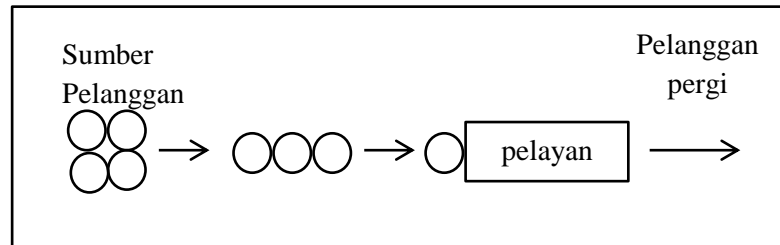
Menurut Subagyo(2000), Desain sarana pelayanan dapat diklasifikasikan dalam *channel* dan *phase* yang akan membentuk suatu struktur antrian yang berbeda-beda. *Channel* menunjukkan jumlah jalur untuk memasuki sistem pelayanan. *Phase* berarti jumlah stasiun-stasiun pelayanan, dimana para langganan harus melaluinya sebelum pelayanan dinyatakan lengkap.

Ada empat model struktur antrian dasar yang umum terjadi dalam seluruh sistem antrian:

1) *Single Channel – Single Phase*

Single Channel berarti bahwa hanya ada satu jalur untuk memasuki sistem pelayanan atau ada satu pelayanan. *Single phase* menunjukkan bahwa hanya ada satu stasiun pelayanan sehingga yang telah menerima

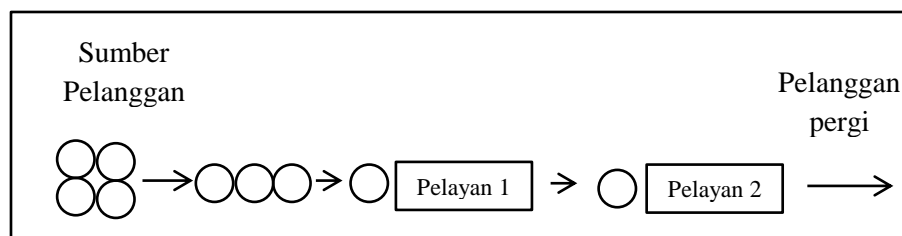
pelayanan dapat langsung keluar dari sistem antrian. Contohnya antrian pada penjualan karcis kereta api yang hanya dibuka satu loket.



Gambar 2.1. Sistem Antrian *Single Channel-Single Phase*

2) *Single Channel - Multi Phase*

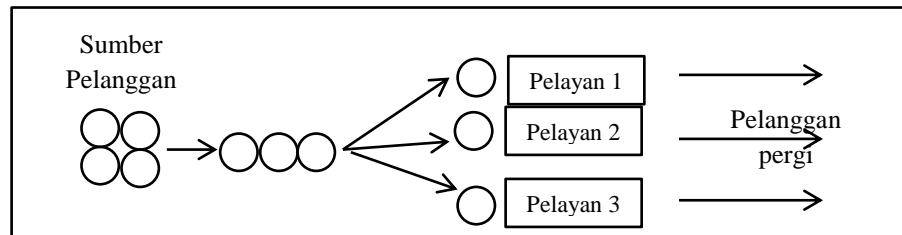
Multi phase berarti ada dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan dalam *phase-phase*. Misalnya pada antrian di *laundry*, pakaian-pakaian setelah dicuci kemudian di jemur lalu disetrika dan terakhir di kemas.



Gambar 2.2 Sistem Antrian *Single Channel-Multi Phase*

3) *Multi Channel - Single Phase*

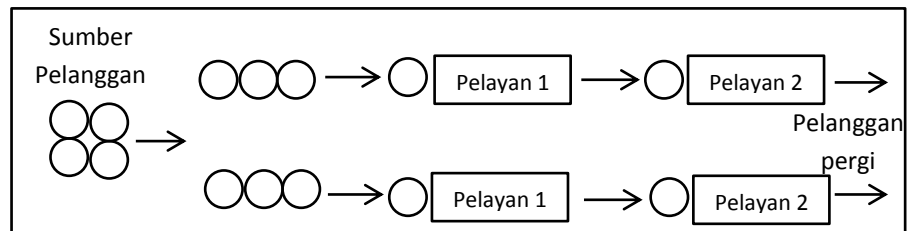
Sistem *multi channel-single phase* terjadi jika ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh suatu antrian tunggal. Sebagai contoh adalah sarana pelayanan nasabah di Bank. Ilustrasi sistem *multi channel – single phase* dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 2.3 Sistem antrian *Multi Channel-Single Phase*

4) *Multi Channel - Multi Phase*

Sistem ini terjadi jika ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dengan pelayanannya lebih dari satu *phase*. Sebagai contoh adalah pelayanan kepada pasien di rumah sakit dari pendaftaran, diagnosa, tindakan medis sampai pembayaran. Setiap sistem-sistem ini mempunyai beberapa fasilitas pelayanan pada setiap tahap, sehingga lebih dari satu individu dapat dilayani pada suatu waktu.



Gambar 2.4. Sistem Antrian *Multi Channel - Multi Phase*

e. Disiplin Antrian

Menurut Winston (2008), disiplin antrian menjelaskan metode untuk yang digunakan untuk mengidentifikasi urutan pelanggan yang dilayani. Adapun pembagian disiplin antrian ialah:

- 1) *First come first served (FCFS)* atau *first in first out (FIFO)*, suatu peraturan dimana yang akan dilayani ialah *customer* yang datang terlebih dahulu. Contohnya antrian di suatu kasir sebuah swalayan.

- 2) *Last come first served (LCFS)* atau *last in first out (LIFO)* merupakan antrian dimana yang datang paling akhir adalah yang dilayani paling awal atau paling dahulu. Contohnya antrian pada satu tumpukan barang digudang, barang yang terakhir masuk akan berada ditumpukkan paling atas, sehingga akan diambil pertama.
- 3) *Service in random order (SIRO)* atau pelayanan dalam urutan acak atau sering dikenal juga *random selection for services(RSS)*, artinya pelayanan atau panggilan didasarkan pada peluang secara random, tidak mempermasalahkan siapa yang lebih dahulu tiba. Contohnya kertas – kertas undian yang menunggu untuk ditentukan pemenangnya, yang diambil secara acak.
- 4) *Priority service (PS)*, artinya prioritas pelayanan diberikan kepada mereka yang mempunyai prioritas paling tinggi dibandingkan dengan mereka yang memiliki prioritas paling rendah, meskipun yang terakhir ini sudah lebih dahulu tiba dalam garis tunggu. Kejadian seperti ini bisa disebabkan oleh beberapa hal, misalnya seseorang yang keadaan penyakit yang lebih berat dibanding dengan orang lain dalam sebuah rumah sakit.

f. Sumber Pemanggilan

Menurut Taha (2007:552), ukuran sumber pemanggilan adalah banyaknya populasi yang membutuhkan pelayanan dalam suatu sistem antrian. Ukuran sumber pemanggilan dapat terbatas maupun tak terbatas. Sumber pemanggilan terbatas misalnya mahasiswa yang akan melakukan registrasi ulang di suatu universitas, dimana jumlahnya sudah pasti. Sedangkan sumber pemanggilan yang

tak terbatas misalnya nasabah bank yang antri untuk menabung atau membuka rekening baru, jumlahnya bisa tak terbatas.

g. Perilaku Manusia

Perilaku manusia merupakan perilaku – perilaku yang mempengaruhi suatu sistem antrian ketika manusia mempunyai peran dalam sistem baik sebagai *customer* maupun pelayan. Jika manusia berperan sebagai pelayan, dapat melayani *customer* dengan cepat atau lambat sesuai kemampuannya sehingga mempengaruhi lamanya waktu tunggu (Taha, 2007:552).

Menurut Taha (2007:552), perilaku manusia dalam sistem antrian sebagai *customer* sebagai berikut.

- 1) *Reneging* menggambarkan situasi dimana seseorang masuk dalam antrian, namun belum memperoleh pelayanan, kemudian meninggalkan antrian tersebut karena sudah menunggu terlalu lama.
- 2) *Balking* menggambarkan orang yang tidak masuk dalam antrian dan langsung meninggalkan tempat antrian.
- 3) *Jockeying* menggambarkan situasi jika dalam sistem ada dua atau lebih jalur antrian maka orang dapat berpindah antrian dari jalur yang satu ke jalur yang lain dengan harapan dapat untuk mengurangi waktu tunggu.

3. Notasi Kendall

Notasi baku untuk memodelkan suatu sistem antrian pertama kali dikemukakan oleh D.G.Kendall pada tahun 1953 dalam bentuk $a / b / c$, dan dikenal sebagai notasi kendall. Namun, pada tahun 1966 A.M. Lee menambahkan

simbol d dan e sehingga menjadi $a / b / c / d / e$ yang disebut notasi Kendall-Lee (Taha,2007:569).

Menurut Taha (2007:569), notasi Kendall-lee tersebut perlu ditambah dengan simbol f . Sehingga karakteristik suatu antrian dapat dinotasikan dalam format baku ($a/b/c$): ($d/e/f$). Notasi dari a sampai f tersebut berturut - turut menyatakan distribusi waktu antar kedatangan, distribusi waktu pelayanan, jumlah *server* pelayanan, disiplin antrian, kapasitas sistem, dan ukuran sumber pemanggilan. Notasi a sampai f dapat digantikan dengan simbol - simbol yang diberikan dalam tabel berikut.

Tabel 2.1 Simbol – Simbol Pengganti Notasi Kendall-Lee

Notasi	Simbol	Keterangan
a dan b	M	Markov menyatakan kedatangan dan kepergian berdistribusi Poisson (Waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial).
	D	Deterministik menyatakan waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan konstan
	E_k	Waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan berdistribusi Erlang
	GI	Distribusi independen umum dari kedatangan (atau waktu antar kedatangan)
	G	Distribusi umum dari keberangkatan (atau waktu pelayanan)
D	FCFS/FIFO	<i>Fisrt Come First Served/ First In First Out</i>
	LCFS/LIFO	<i>Last Come First Served/ Last In First Out</i>
	SIRO	<i>Service in random order</i>
	PS	<i>Priority service</i>
c, e, f	1, 2, 3, ... ∞	

D. *Quasi-Stationary Distribution (QSD)*

QSD atau Distribusi Quasi-Stasioner. Jika $\{X_t : t \geq 0\}$ adalah proses Markov pada ruang kedudukan E dari bentuk $0 \cup \{1, 2, \dots\}$ dimana 0 adalah *absorbing state* dan $E^* := \{1, 2, \dots\}$ adalah kelas transisi *irreducible*. Misal Q adalah matriks nilai transisi yang berkoresponden dengan komponen q_{ij} yang merepresentasikan kedudukan dari i ke j . Misal T_0 adalah waktu mula-mula, $T_0 = \inf\{t \geq 0 ; X_t = 0\}$. Lebih lanjut diasumsikan bahwa ekspektasi dari T_0 adalah terbatas untuk semua $i \in E^*$. Diberikan definisi sebagai berikut.

1. $\alpha \in P(E^*)$: Distribusi Quasi-Stasioner

$$\Leftrightarrow \alpha(A) = P_\alpha(X_t \in A \mid T_0 > t), \forall t > 0, A \subset E^*$$

2. $\alpha \in P(E^*)$: Distribusi Limit Quasi

$$\Leftrightarrow \exists \nu \in P(E^*) \text{ s.t.}$$

$$\alpha(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_\nu(X_t \in A \mid T_0 > t), A \subset E^*$$

3. $\alpha \in P(E^*)$: Limit Yaglom

$$\Leftrightarrow \alpha(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_x(X_t \in A \mid T_0 > t), \forall x \in E^*, A \subset E^*$$

E. **Model Epidemi**

Model epidemi adalah model matematika yang digunakan untuk mengetahui model penyebaran penyakit menular pada suatu daerah tertentu. Model epidemi menggunakan diskripsi mikroskopik (peranan dari infeksi individu) untuk

meramalkan kelakuan makroskopik dari penyebaran penyakit dalam populasi (Hethcote, 2000).

Tipe model epidemi matematika terdiri dari dua yaitu (Allen, 2008):

1. Model deterministik

Model deterministik sering diformulasikan dalam istilah sistem persamaan differensial. Solusi fungsinya terhadap waktu atau ruang dan nilainya unik bergantung pada data awal.

2. Model stokastik

Model stokastik diformulasikan sebagai proses stokastik dengan kumpulan peubah acak. Solusi dari model stokastik ini adalah distribusi peluang untuk setiap variabel random.

Hingga saat ini, model epidemi semakin berkembang menyesuaikan dengan sifat-sifat pada penyakit yang terjadi.

F. *Tuberculosis*

Tuberculosis adalah penyakit infeksi kronis yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium Tuberculosis* yang biasa menyerang paru tetapi dapat juga mengenai organ tubuh lain seperti pada kelenjar getah bening, ginjal, jantung, dan lain sebagainya (Somantri, 2008).

Mycobacterium Tuberculosis berbentuk batang berwarna merah yang mempunyai sifat khusus yaitu tahan terhadap asam pada saat pewarnaan sehingga disebut sebagai Basil Tahan Asam (BTA). Basil ini tidak dapat bertahan hidup

lama, cepat mati jika terkena sinar matahari secara langsung tetapi dapat bertahan hidup beberapa jam ditempat yang gelap dan lembab.

Mycobacterium Tuberculosis ini ditularkan dari orang perorang melalui jalan pernapasan. Pada umumnya, penularan *tuberculosis* berasal dari orang dewasa yang positif *tuberculosis* dimana batuk atau percikan ludahnya bertebaran di udara. Percikan ludah ini mengandung basil *tuberculosis* dan bila seorang anak menghirup udara yang mengandung basil tersebut akan berkembangbiak perlahan-lahan dan menyebabkan kelainan pada paru- paru (Somantri, 2008).

Daya penularan *tuberculosis* dari seorang penderita ditentukan oleh banyaknya kuman yang dikeluarkan dari paru. Semakin tinggi derajat positif hasil pemeriksaan dahak, semakin besar kemungkinan penderita menularkan penyakit tersebut. Bila hasil pemeriksaan dahak negatif (tidak terlihat kuman), maka penderita tersebut dianggap tidak menular. Kemungkinan seorang terinfeksi *tuberculosis* ditentukan oleh konsentrasi droplet atau percikan dahak dalam udara dan lamanya menghirup udara tersebut (Depkes RI, 2001).

Gejala *tuberculosis* dapat bermacam-macam seperti demam menyerupai influenza suhu tubuh meningkat hingga 40°C, batuk maupun batuk berdarah, penurunan aktivitas, susah bernapas, nyeri dada, nafsu makan kurang sehingga berat badan anak menurun. Penurunan berat badan disebabkan karena metabolisme dalam tubuh meningkat sehingga tubuh membutuhkan energi lebih, akan tetapi karena nafsu makan anak menurun maka asupan energi dalam tubuh berkurang sehingga berat badan menurun. (Radji, 2010)

Beberapa faktor yang menyebabkan timbulnya *tuberculosis*:

1. Faktor Infeksi

Penularan *tuberculosis* dapat melalui 4 cara, yaitu:

a. Batuk orang dewasa

Saat orang dewasa batuk atau bersin, sejumlah tetesan cairan (ludah) tersembur ke udara. Bila orang tersebut menderita *tuberculosis* paru, maka tetesan tersebut mengandung kuman. Jika disekitar orang tersebut terdapat orang dewasa atau anak-anak yang pada saat itu kekebalan tubuhnya menurun maka dengan mudah akan terinfeksi atau tertular

b. Makanan atau susu

Anak- anak bisa terinfeksi *tuberculosis* dari susu atau makanan, dan infeksi bisa terjadi mulai pada mulut atau usus. Susu dapat mengandung *tuberculosis* dari sapi (*bovine TB*), bila sapi di daerah tersebut menderita *tuberculosis* dan susu tidak direbus sebelum diminum. Bila hal ini terjadi, infeksi terjadi pada usus, atau terkadang pada amandel.

c. Melalui kulit

Kulit yang utuh ternyata tahan terhadap *tuberculosis* yang jatuh diatas permukaannya. Namun, bila terdapat luka atau goresan baru, *tuberculosis* dapat masuk dan menyebabkan infeksi yang serupa dengan yang ditemukan pada paru.

d. Keturunan dari ibu

Apabila seorang ibu yang sedang hamil menderita *tuberculosis* maka sudah pasti anaknya positif menderita *tuberculosis*.

2. Faktor Lingkungan

Lingkungan yang tidak sehat, gelap dan lembab akan mendukung perkembangbiakan basil *Mycobacterium Tuberculosis*. Seperti diketahui basil tuberculosis merupakan BTA (Basil Tahan Asam) yang dapat berkembangbiak apabila ada di ruangan yang gelap dan lembab, akan mati jika terkena sinar matahari secara langsung. Jadi kebersihan lingkungan perlu diperhatikan.

3. Faktor Ekonomi

Faktor ekonomi berkaitan dengan ketersediaan pangan yang kaya zat gizi. Ekonomi juga menjadi faktor pendukung yang mempengaruhi penyebab penularan *tuberculosis*. Seorang ibu dengan perekonomian rendah maka untuk mencukupi makanan bergizi untuk tumbuh kembang anak susah, sehingga mereka hanya memberi makanan apa saja tanpa mengetahui nilai gizinya. Padahal kita tahu bahwa dengan mengonsumsi makanan sehat dan bergizi akan bermanfaat bagi tumbuh kembang anak dan meningkatkan kekebalan tubuh anak terhadap penyakit (Harun, 2002).

4. Pelayanan Kesehatan

Adanya penyakit *tuberculosis* yang semakin tinggi di Indonesia membuat pelayanan kesehatan yang harus ditingkatkan oleh pemerintah, melihat penderita penyakit tersebut adalah anak-anak yang masih dalam masa pertumbuhan membutuhkan perawatan intensif. Apabila tingkat pelayanan kesehatan tidak optimal maka akan mempengaruhi penyembuhan *tuberculosis* dan bila tingkat pelayanan kesehatan bekerja secara optimal

maka laju peningkatan penyakit *tuberculosis* dapat ditekan seminimal mungkin. Hal ini tidak lepas pula dari peran pemerintah dan masyarakat dalam menanggapi segala macam penyakit agar tidak terjadi angka kematian anak yang tinggi (Depkes RI, 2001).

Penularan *tuberculosis* umumnya terjadi karena percikan dahak penderita saat batuk dan meludah. Bisa juga melalui debu alat makan atau minum yang mengandung basil *Mycobacterium Tuberculosis*. Kemudian masuk ke dalam tubuh orang yang pada saat itu sistem imunitas dalam tubuhnya menurun sehingga mudah terinfeksi. Bersamaan dengan itu, sebagian kuman akan dibawa melalui cairan getah bening ke kelenjar getah bening yang terdekat disamping bronkus. Dari kedua tempat tersebut, kuman akan menimbulkan reaksi tubuh, dan sel-sel kekebalan tubuh akan berkumpul. Dalam waktu 4 hingga 8 minggu akan muncul daerah kecil di tengah-tengah proses tersebut dimana terdapat jaringan tubuh yang mati (*perkijuan*) yang dikelilingi sel-sel kekebalan tubuh yang makin membesar. Perubahan-perubahan yang terjadi pada paru dan kelenjar getah bening ini dikenal sebagai *tuberculosis* primer (Harun, 2002). Basil *Mycobacterium Tuberculosis* ini dapat bertahan selama 1-2 jam pada suasana lembab dan gelap, sebaliknya akan mati jika terkena sinar matahari. Dalam jaringan tubuh kuman ini dapat *dormant*, tertidur lama selama beberapa tahun (Depkes RI, 2001).

G. Bilangan Reproduksi Dasar

Menurut Blyuss dan Kyrychko (2005), bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah rata-rata banyaknya individu rentan yang terinfeksi secara langsung oleh individu

lain yang sudah terinfeksi bila individu yang sudah terinfeksi tersebut masuk ke dalam populasi yang seluruhnya masih rentan. Bilangan reproduksi dasar didefinisikan (R_0) sebagai berikut

$$R_0 = \frac{\lambda}{\mu}, \text{ dengan } \lambda = \text{tingkat kedatangan dan } \mu = \text{tingkat kesembuhan.}$$

Menurut Blyuss dan Kyrychko (2005), kondisi yang akan timbul adalah salah satu di antara kemungkinan berikut :

- a. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit akan hilang.
- b. Jika $R_0 = 1$, maka penyakit akan tetap ada namun tidak mewabah.
- c. Jika $R_0 > 1$, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah.

Bilangan reproduksi dasar juga dapat digunakan sebagai tolok ukur apakah penanganan terhadap penyebaran suatu penyakit memberikan efek positif atau negatif. Yaitu dengan membandingkan nilai bilangan reproduksi dasar sebelum dilakukan penanganan dan setelah dilakukan penanganan. Jika nilai bilangan reproduksi dasar setelah dilakukan penanganan lebih kecil maka penanganan tersebut berdampak positif terhadap penyebaran penyakit..

Berdasarkan uraian teori antrian dan statistik diatas akan diaplikasikan pada permasalahan nyata model epidemi SIS untuk penyakit *tuberculosis*.